ตะลุยโจทย์ ม.ปลาย
เพื่อเตรียมสอบ GAT-PAT พ.ย.57
วิชา PAT 1 : คณิตศาสตร์
ชุดที่ 1 (ตอนที่ 3/7)

โดยช่วงตั้งแต่ 7 ต.ค. - 20 พ.ย. 57 ท่านสามารถติดตามได้ดังนี้
วันอังคารดูวิชา GAT, วันพุธดูวิชา PAT1, วันพฤหัสดูวิชา PAT2

1. จงหาจำนวนวิธีวางหมาก 8 ตัวที่**แตกต่างกัน**ลงบนตารางหมากรุกขนาด 8×8 โดย**ไม่มี**หมากสองตัวใดๆ อยู่ในแถวเดียวกันหรือหลักเดียวกัน

1) $204 \cdot 8!$ 2) $(8!)^2$ 3) 204 4) 64

2. ให้ L เป็นเส้นตรงในระบบพิกัดฉากสามมิติ ซึ่งขนานกับเวกเตอร์ $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$

ถ้าเส้นตรงนี้ผ่านจุด $(-2, 3, 5)$ แล้วจุดบน L สอดคล้องกับสมการใดต่อไปนี้

1) $2x + 4 = y - 3 = 3z - 15$ 2) $x + 2 = y - 3 = z - 5$
3) $-6x - 12 = 3y - 9 = 10 - 2z$ 4) $6x + 12 = 9 - 3y = 2z - 10$

3. กำหนดให้ $a \in R$ และ x, y, z สอดคล้องกับระบบสมการ

$$\begin{aligned} x + y - z &= 1 \\ 2x + 3y + az &= 3 \\ x + ay + 3z &= 2 \end{aligned}$$

ถ้า $A = \{a \in R \mid$ มี x, y, z เพียงชุดเดียวที่สอดคล้องระบบสมการข้างต้น$\}$ แล้วข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $R - A$ เป็นเซตจำกัด
2) ถ้า $a, b \in A$ และ $a \neq b$ แล้ว $a + b \geq 0$
3) $\forall x \in A\, [x^2 - 4x + 3 \leq 0]$
4) $\forall x \in A\, \exists y \in A\, [x + y] = 0$

4. ค่าเฉลี่ยเลขคณิต มัธยฐาน ฐานนิยม (มีค่าเดียว) และพิสัยของจำนวนเต็ม 8 จำนวนต่างมีค่าเท่ากับ 8 จงหาจำนวนเต็มที่**มากที่สุด**ในจำนวนทั้งแปดนี้

1) 11 2) 12 3) 13 4) 14

5. ให้ $S = \{x \mid 2|x| \leq |x + 1| \leq 1\} = [c, d]$ แล้ว $|3c| + \left|\frac{d}{2}\right|$ เท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 6 2) 1 3) $\frac{2}{3}$ 4) $\frac{1}{3}$

6. กำหนดให้ $A = \left\{x \in I \mid \frac{x+3}{x-1} \geq 2\right\}$ และ n แทนจำนวนสับเซตแท้ของ A ที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว แล้วข้อใดต่อไปนี้**ถูกต้อง**

1) $n \leq 14$ 2) $14 < n \leq 16$ 3) $16 < n \leq 30$ 4) $n > 30$

7. กำหนด $f(x) = 3x - 2$ และ $h(x) = x^4 - 2x^2 + x$ ถ้า g เป็นฟังก์ชัน ซึ่ง $g \circ h = f$ แล้ว $g^{-1}(10)$ มีค่าเท่ากับข้อใดต่อไปนี้

1) 44 2) 78 3) 132 4) 228

เฉลย

1. เฉลย 2) $(8!)^2$

หมากตัวที่ 1 เลือกวางได้ $8 \times 8 = 64$ วิธี

หมากตัวที่ 2 ต้อง**ไม่วาง**ตรงแถวหรือหลักเดียวกันกับตัวแรกจึงเลือกวางได้ 7×7 วิธี

หมากตัวที่ 3 ต้อง**ไม่วาง**ตรงแถวหรือหลักเดียวกันกับตัวแรกหรือตัวที่สองจึงเลือกวางได้ 6×6 วิธี

ในทำนองเดียวกันหมากตัวที่ 4–8 เลือกวางได้ 5×5, 4×4, 3×3, 2×2 และ 1×1 วิธี ตามลำดับ

ดังนั้น จำนวนวิธีในการเลือกวางหมาก คือ $(8 \times 8) \times (7 \times 7) \times (6 \times 6) \times \ldots \times (1 \times 1) = (8!)^2$ วิธี

2. เฉลย 4) $6x + 12 = 9 - 3y = 2z - 10$

ให้ $P(x, y, z)$ เป็นจุดใดๆ บนเส้นตรง L และ $(-2, 3, 5)$ เป็นจุดบนเส้นตรง L

$$\because\ L \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ ดังนั้น } \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-5 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\therefore\ \text{มี } t \in \mathbf{R} \text{ ซึ่ง } \begin{bmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z-5 \end{bmatrix} = t\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} \quad \therefore\ \begin{aligned} x + 2 &= t \\ y - 3 &= -2t \\ z - 5 &= 3t \end{aligned}$$

$$\therefore\ x + 2 = \frac{y-3}{-2} = \frac{z-5}{3}$$

ใช้ 6 คูณตลอด จะได้ $6x + 12 = 9 - 3y = 2z - 10$

3. เฉลย 1) $R - A$ เป็นเซตจำกัด

จากโจทย์ $A = \{a \in R \mid$ มี x, y, z เพียงชุดเดียวที่สอดคล้องระบบสมการที่กำหนด$\}$

$$= \left\{a \in R \mid \det\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & a \\ 1 & a & 3 \end{bmatrix}\right) \neq 0\right\}$$

$= \{a \in R \mid (9 + a - 2a) - (-3 + a^2 + 6) \neq 0\}$

$= \{a \in R \mid -a^2 - a + 6 \neq 0\}$

$= \{a \in R \mid a^2 + a - 6 \neq 0\}$

$= \{a \in R \mid (a + 3)(a - 2) \neq 0\}$

$\therefore\ A = R - \{2, -3\}$

1) **ถูก** เพราะ $R - A = \{2, -3\}$ เป็นเซตจำกัด

2) **ผิด** เพราะ ถ้า $a, b \in A$, $a \neq b$ แล้ว $a + b$ อาจน้อยกว่า 0 ได้ เช่น $a = 0$, $b = -1$

3) **ผิด** เพราะ $0 \in A$ และ $0^2 - 4(0) + 3 \geq 0$

4) **ผิด** เพราะ $3 \in A$ แต่ไม่มี $y \in A$ ซึ่ง $3 + y = 0$

4. เฉลย 4) 14

เซตของจำนวน 6, 6, 6, 8, 8, 8, 8, 14 สอดคล้องกับเงื่อนไขที่กำหนดให้ ดังนั้นคำตอบ คือ จำนวนเต็มที่**มากที่สุด**มีค่าอย่างน้อย 14 ถ้าจำนวนที่**มากที่สุด** คือ 15 เซตของจำนวนที่ต้องการจะต้องเรียงกันในรูปแบบ 7, __, __, 8, 8, __, __, 15 แต่ $7 + 8 + 8 + 15 = 38$ และเนื่องจากค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 8 ทำให้ผลบวกของ 8 จำนวนต้องเท่ากับ 64 และอีก 4 จำนวนที่เว้นไว้ต้องมีผลบวกเท่ากับ $64 - 38 = 26$ ซึ่งมีค่าเฉลี่ยเลขคณิตเท่ากับ 6.5 แสดงว่ามีอย่างน้อยหนึ่งจำนวนที่มีค่า**น้อยกว่า** 7 ขัดแย้งกับสมมุติฐานที่กำหนดไว้ว่าจำนวนที่**น้อยที่สุด** คือ 7 ดังนั้น จำนวนที่**มากที่สุด**ที่เป็นไปได้ในเซตนี้ คือ 14

5. เฉลย 2) 1

พิจารณา $2|x| \leq |x + 1| \leq 1$ จะได้ $2|x| \leq |x + 1|$ และ $|x + 1| \leq 1$

กรณีที่ 1

$$\begin{aligned} 2|x| &\leq |x + 1| \\ \therefore\ 4x^2 &\leq x^2 + 2x + 1 \\ 3x^2 - 2x - 1 &\leq 0 \\ (3x + 1)(x - 1) &\leq 0 \\ \therefore\ x &\in \left[-\tfrac{1}{3}, 1\right] \quad \ldots(1) \end{aligned}$$

กรณีที่ 2

$$\begin{aligned} |x + 1| &\leq 1 \\ -1 \leq x + 1 &\leq 1 \\ -2 \leq x &\leq 0 \\ \therefore\ x &\in [-2, 0] \quad \ldots(2) \end{aligned}$$

$\therefore$ จากทั้งสองกรณี $x \in \left[-\frac{1}{3}, 1\right] \cap [-2, 0]$

$x \in \left[-\frac{1}{3}, 0\right]$

$\therefore\ c = -\frac{1}{3}$, $d = 0$

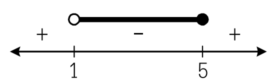
ดังนั้น $|3c| + \left|\frac{d}{2}\right| = \left|3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)\right| + \left|\frac{0}{2}\right| = 1 + 0 = 1$

6. เฉลย 1) $n \leq 14$

พิจารณาอสมการ $\frac{x+3}{x-1} \geq 2 \quad \therefore\ x \neq 1$

นำ $(x - 1)^2$ คูณตลอด ; $(x - 1)(x + 3) \geq 2(x - 1)^2$

$$\begin{aligned} (x - 1)(x + 3) - 2(x - 1)^2 &\geq 0 \\ (x - 1)[(x + 3) - 2(x - 1)] &\geq 0 \\ (x - 1)(-x + 5) &\geq 0 \\ (x - 1)(x - 5) &\leq 0 \end{aligned}$$



ดังนั้น เซตคำตอบของอสมการ คือ $(1, 5]$ ทำให้ได้ว่า $A = \{2, 3, 4, 5\}$ เพราะ A เป็นเซตของจำนวนเต็ม

ดังนั้น จำนวนสับเซตทั้งหมดของ A คือ $2^4 = 16$ สับเซต

เนื่องจาก ϕ เป็นสับเซตของ A ที่มีจำนวนสมาชิกเท่ากับ 0 และ A **ไม่เป็น**สับเซตแท้ของ A

ดังนั้น จำนวนสับเซตแท้ของ A ที่มีสมาชิกอย่างน้อย 1 ตัว คือ $16 - 2 = 14$ สับเซต นั่นคือ $n = 14$

7. เฉลย 4) 228

จาก

$$\begin{aligned} g \circ h &= f \\ g^{-1} \circ (g \circ h) &= g^{-1} \circ f \\ (g^{-1} \circ g) \circ h &= g^{-1} \circ f \\ h &= g^{-1} \circ f \\ \therefore\ x^4 - 2x^2 + x &= g^{-1}(3x - 2) \end{aligned}$$

ต้องการ $g^{-1}(10)$ $\therefore$ $3x - 2 = 10$ ดังนั้น $x = 4$

$(4)^4 - 2(4)^2 + 4 = g^{-1}(3 \cdot 4 - 2)$

จะได้ $g^{-1}(10) = 256 - 32 + 4 = 228$

นักเรียนสามารถเข้าไปดูข้อมูลย้อนหลังได้ที่
www.bunditnaenaew.com